

Velikonoční kalendář – 2025

2. ročník

17.04.2025

1. příklad

- V geometrické posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s kladnými členy, najděte vzorec na výpočet n , je-li dáno a_1, a_n, q
- Kolik členů má konečná geometrická posloupnost 885 735, 590 490,, 10 240?
- První dva členy geometrické posloupnosti jsou čísla 28 762 a 43 008. Je některý člen této posloupnosti číslo: 3 720 087 nebo 489 889 ?

2. příklad

Kvido je najatý na vykonání práce. Za každý odpracovaný den dostane 3 dolary, ale naopak musí zaplatit 1 dolar za první den absence, dva za druhý, tři za třetí, atd. **Kvido** práci dokončil za 16 dní a dostal 26 dolarů. Kolik dní trvala jeho absence?

Ad 1)

$$a) \ n = 1 + \frac{\log a_n - \log a_1}{\log q}$$

b) 12,

c) • ano, je to 13. člen postupnosti: kvocient je $\frac{43\,008}{28\,672} = 1,5$, hledáme přirozené číslo, které je řešením rovnice $3\,720\,087 = 28\,672 \cdot 1,5^{n-1}$, odtiaľ postupne $\frac{3\,720\,087}{28\,672} = 1,5^{n-1}$,
$$n = 1 + \frac{\log \frac{3\,720\,087}{28\,672}}{\log 1,5} = 1 + 12 = 13,$$

Ad 2)

$$4 \text{ dny: } (16 - n) \cdot 3 - \frac{n(n+1)}{2} = 26, \quad \text{pak} \quad n^2 + 7n - 44 = 0.$$

18.04.2025

1. příklad

Řešte v R:

$$\frac{3+x}{3x} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{x}} \cdot \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{2}{x^2}}$$

$$\frac{3+x}{3x} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{x}} \cdot \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{2}{x^2}}$$

$$3x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$

$$\frac{3+x}{3x} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{x}} \cdot \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{2}{x^2}} \quad / \cdot 0^2$$

$$\frac{9+6x+x^2}{9x^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{2}{x^2}}$$

$$\frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{2}{x^2}} = \frac{x^2+6x+9}{9x^2} - \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{2}{x^2}} = \frac{x^2+6x+9-x^2}{9x^2}$$

$$\frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{2}{x^2}} = \frac{6x+9}{9x^2}$$

$$\frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{4x^2+18}{9x^2}} = \frac{3 \cdot (2x+3)}{9x^2}$$

$$\frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{4x^2+18}{9x^2}} = \frac{2x+3}{3x^2}$$

$$\frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{4x^2+18}{9x^2} \right) = \frac{(2x+3)^2}{9x^4}$$

$$\frac{4x^2+18}{9x^4} = \frac{4x^2+12x+9}{9x^4} \quad / \cdot 9x^4$$

$$4x^2+18 = 4x^2+12x+9$$

$$12x = 9$$

$$x = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

2. příklad

Řešte v R:

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}}$$

$$x \neq 0$$

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}} = \sqrt{x - \sqrt{x}} \quad / 0^2$$

$$x + \sqrt{x} - 3 \cdot \sqrt{x} + \frac{9}{4} \cdot \left(\frac{x}{x + \sqrt{x}} \right) = x - \sqrt{x}$$

$$x - 2 \cdot \sqrt{x} + \frac{9}{4} \cdot \left(\frac{x}{x + \sqrt{x}} \right) = x - \sqrt{x}$$

$$\frac{9}{4} \cdot \left(\frac{x}{x + \sqrt{x}} \right) = -\sqrt{x} + 2 \cdot \sqrt{x}$$

$$\frac{9}{4} \cdot \frac{x}{x + \sqrt{x}} = \sqrt{x}$$

$$\frac{9x}{4x + 4\sqrt{x}} = \sqrt{x} \quad \dots\dots\dots / \cdot (4x + 4\sqrt{x})$$

$$9x = 4x\sqrt{x} + 4x$$

$$5x = 4x\sqrt{x}$$

$$0 = 4x\sqrt{x} - 5x$$

$$0 = x \cdot (4\sqrt{x} - 5) \quad \wedge \quad x \neq 0 \Rightarrow 4\sqrt{x} = 5$$

$$16x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{16}$$

Zkouška:

$$L = \sqrt{\frac{25}{16} + \sqrt{\frac{25}{16}}} - \sqrt{\frac{25}{16} - \sqrt{\frac{25}{16}}} = \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{5}{4}} - \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{5}{4}} = \sqrt{\frac{45}{16}} - \sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{3\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$P = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{\frac{25}{16}}{\frac{25}{16} + \sqrt{\frac{25}{16}}}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{\frac{25}{16}}{\frac{25}{16} + \frac{5}{4}}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{\frac{25}{16}}{\frac{45}{16}}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{5}{4}}{\frac{3\sqrt{5}}{4}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3\sqrt{5}} = \frac{5 \cdot \sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$L = P$$

19.04.2025

1. příklad

Řešte v R:

$$3^{\log_3 \log \sqrt{x}} - \log x + \log^2 x - 3 = 0$$

$$3^{\log_3 \log \sqrt{x}} - \log x + \log^2 x - 3 = 0$$

Víme, že platí :

$$x = a^{\log_a x} \quad \text{tj.} \quad 3^{\log_3 \log \sqrt{x}} = \log \sqrt{x}$$

$$\log \sqrt{x} > 0 ; x > 1$$

$$\log \sqrt{x} - \log x + \log^2 x - 3 = 0$$

$$\log x^{\frac{1}{2}} - \log x + \log^2 x - 3 = 0$$

$$\log^2 x - \log x + \frac{1}{2} \cdot \log x - 3 = 0 \quad \dots \log x = t$$

$$t^2 - t + \frac{1}{2} \cdot t - 3 = 0 \quad / \cdot 2$$

$$2 \cdot t^2 - 2 \cdot t + t - 6 = 0$$

$$2 \cdot t^2 - t - 6 = 0$$

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 1 + 48 = 49 \quad \Rightarrow \sqrt{49} = 7$$

$$t_1 = \frac{1+7}{4} = \frac{8}{4} = 2 \quad \vee \quad t_2 = \frac{1-7}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$\log x = 2 \quad \wedge \quad \log x = -\frac{3}{2}$$

$$x_1 = 10^2 \quad x_2 = 10^{-\frac{3}{2}}$$

$$x_1 = 100 \quad x_2 = \frac{1}{10^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{10^3}} < 1 \quad \Rightarrow x_2 \text{ nevyhovuje}$$

Výsledek: $x = 100$

2. příklad

Řešte v $\mathbb{R}$:

$$4^{\log_9 x^2} - 1 = 4^{1+\log_9 x} - 4^{-1+\log_9 x}$$

$$4^{2\log_9 x} - 1 = 4 \cdot 4^{\log_9 x} - 4^{-1} \cdot 4^{\log_9 x}$$

$$4^{2\log_9 x} - 1 = 4 \cdot 4^{\log_9 x} - \frac{1}{4} 4^{\log_9 x}$$

Zavedeme $4^{\log_9 x} = t$

$$t^2 - 1 = 4t - \frac{1}{4}t$$

$$4t^2 - 4 = 16t - t \Rightarrow 4t^2 - 15t - 4 = 0 \Rightarrow t_1 = 4 \quad t_2 = -\frac{1}{4}$$

Vrátíme se k substituci:

a) $4^{\log_9 x} = 4 \Rightarrow \log_9 x = 1 \Rightarrow x = 9$

b) $4^{\log_9 x} = \frac{1}{4} \Rightarrow \log_9 x = -1 \Rightarrow x = 9^{-1} = \frac{1}{9}$

$$x = 9 \quad x = \frac{1}{9}$$

20.04.2025

1. příklad

Řešte v R:

$$4 \cdot \sqrt{2^{5-7x}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4^{3-5x}}$$

$$4 \cdot \sqrt{2^{5-7x}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4^{3-5x}}$$

$$2^2 \cdot 2^{\frac{5-7x}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{2(3-5x)}{3}}$$

$$2^{2+\frac{5-7x}{2}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{6-10x}{3}}$$

$$2^{\frac{5-7x+4}{2}} = 2^{\frac{2(6-10x)+3}{6}}$$

$$2^{\frac{9-7x}{2}} = 2^{\frac{15-20x}{6}}$$

$$\frac{9-7x}{2} = \frac{15-20x}{6} \quad / \cdot 6$$

$$3 \cdot (9-7x) = 15-20x$$

$$27-21x = 15-20x$$

$$x = 12$$

2. příklad

$$\frac{10^{x^2}}{2^{-15}} = \frac{5^{-15}}{10^{12-12x}}$$

$$\frac{10^{x^2}}{2^{-15}} = \frac{5^{-15}}{10^{12-12x}}$$

$$\frac{10^{x^2}}{2^{-15}} = \frac{5^{-15}}{10^{12-12x}}$$

$$\frac{2^{x^2} \cdot 5^{x^2}}{2^{-15}} = \frac{5^{-15}}{10^{12} \cdot 10^{-12x}}$$

$$\frac{2^{x^2} 5^{x^2}}{2^{-15}} = \frac{5^{-15}}{2^{12} \cdot 5^{12} \cdot 2^{-12x} \cdot 5^{-12x}}$$

$$2^{x^2+15} \cdot 5^{x^2} = 5^{-15-12+12x} \cdot 2^{12x-12}$$

$$\frac{2^{x^2+15}}{2^{12x-12}} = \frac{5^{12x-27}}{5^{x^2}}$$

$$2^{x^2+15-12x+12} = 5^{12x-27-x^2}$$

$$2^{x^2-12x+27} = 5^{-1(x^2-12x+27)}$$

$$2^{x^2-12x+27} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-12x+27} \quad / \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-12x+27}}$$

$$\left(\frac{2}{1/5}\right)^{x^2-12x+27} = 1 \Rightarrow 10^{x^2-12x+27} = 10^0$$

$$x^2-12x+27=0 \Rightarrow (x-9) \cdot (x-3)=0$$

Řešení: $x = 9$ a $x = 3$

21.04.2025

1. příklad

Vklady **A**, **B**, **C**, jejichž hodnoty tvoří 3 po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, jsou uloženy při 12% roční úrokové míře. **Celkový úrok po jednom roce je 2 484 Kč.** Vypočtete jejich velikosti, když víte, že **rozdíl mezi vkladem A a vkladem C je 1 800 Kč.**

$$a_1 = A \quad a_2 = B \quad a_3 = C \quad \dot{u} = K_0 \cdot i = K_0 \cdot \frac{p}{100}$$

$$a_3 - a_1 = 1800 = 2d \Rightarrow d = 900$$

$$a_1 = A \quad a_2 = A + 900 \quad a_3 = A + 1800$$

$$\dot{u} = A \cdot \frac{12}{100} + B \cdot \frac{12}{100} + C \cdot \frac{12}{100} = \frac{12}{100} \cdot (A + B + C) = \frac{12}{100} \cdot (3A + 2700)$$

$$2484 = \frac{12}{100} \cdot (3A + 2700)$$

$$248400 = 36A + 32400$$

$$36A = 216000 \quad \dots \quad |:36$$

$$A = 6000 \text{ Kč}$$

Řešení:

Velikosti vkladů : $A = 6000 \text{ Kč}$; $B = 6900 \text{ Kč}$; $C = 7800 \text{ Kč}$

Velikosti úroků : $\dot{u}_A = 720 \text{ Kč}$; $\dot{u}_B = 828 \text{ Kč}$; $\dot{u}_C = 936 \text{ Kč}$ $\sum 2824 \text{ Kč}$

2. příklad

Peněžník uložil kapitál **A** na 6 měsíců na jednoduchý úrok a získal úroky ve výši 11 000,- Kč. Ve stejný den uložil kapitál **B** o 50 000,- Kč větší než kapitál **A** jednoduchý úrok o 2% nižší a za 9 měsíců obdržel konečný kapitál 266 875,- Kč. Jaký byl kapitál **A** a **B**, jaké byly úrokové míry?

$$\text{Jednoduchý úrok: } \dot{u} = K_0 \cdot i \cdot t = K_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{m}{12}$$

Kapitál A:

$$u_A = A \cdot \frac{p_A}{100} \cdot \frac{6}{12} = A \cdot \frac{p_A}{100} \cdot \frac{1}{2} = 11000 \Rightarrow A \cdot p_A = 2200000$$

Kapitál B:

$$u_B = B \cdot p_B \cdot \frac{m}{12} = (A + 50000) \cdot p_B \cdot \frac{9}{12} = (A + 50000) \cdot \frac{p_A - 2}{100} \cdot \frac{3}{4}$$

Musí podle zadání platit:

$$B + u_B = 266875$$

$$(A + 50000) \cdot \left(1 + \frac{p_A - 2}{100} \cdot \frac{3}{4}\right) = 266875$$

$$(A + 50000) \cdot \frac{400 + 3p_A - 6}{400} = 266875$$

$$(A + 50000) \cdot (394 + 3p_A) = 106750000$$

$$A \cdot p_A = 2200000$$

$$394 \cdot A + 19700000 + 3 \cdot A \cdot p_A + 150000 \cdot p_A = 106750000$$

$$394 \cdot A + 19700000 + 3 \cdot 2200000 + 150000 \cdot \frac{2200000}{A} = 106750000$$

$$394 \cdot A^2 + 19700000 \cdot A + 6600000 \cdot A + 330000000000 = 106750000 \cdot A$$

$$394 \cdot A^2 - 80450000 \cdot A + 330000000000 = 0$$

$$A_1 = 200000 \text{ Kč} \Rightarrow p_A = \frac{2200000}{200000} = 11\%$$

$$A_2 = 4187,81725888325 \text{ Kč} \dots \text{ nevyhovuje zadání}$$

Kapitál B:

$$B = 200000 + 50000 = 250\,000 \text{ Kč}$$

$$p_B = p_A - 2 = 11 - 2 = 9\%$$